Exercices Série 18

1. Donnez le développement de McLaurin pour la fonction $f(x) = \cos(x)$.

2. Donnez le développement de Taylor pour la fonction $f(x) = \sin(x)$ au point $a = \pi/2$.

3. Donnez le développement de Taylor pour la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$ en un point quelconque. Déduisez la formule pour calculer e.

Réponses

1. $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(x)x^2}{2!} + \cdots$

Notons que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\sin(0) = 0$, $f''(0) = -\cos(0) = -1$, … Il y a donc une alternance de signe avec toutes les puissances PAIRES, ce qui donne

$$f(x) = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

2. Notons que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = \cos(0) = 0$, $f''(0) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, … Il y a donc une alternance de signe avec toutes les puissances PAIRES, ce qui donne

$$f(x) = \sin(x) = 1 - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2} + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!}$$

3. Notons que $f'(x) = f(x) = e^x$ et donc

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^a (x-a)^n}{n!}.$$

Notez qu'en particulier, pour $a = 0$ et $x = 1$, nous obtenons la formule pour calculer e :

$$e = e^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$